

Soluzione:

$$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x \log(1+x^2)$$

$$f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2} \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) + 1 \cdot \log(1+x^2) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x =$$

$$= 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x^2+1} + \log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} =$$

$$= 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{1+x^2} + \log(1+x^2)$$

3. Una primitiva della funzione $f(x) = 2x \sin(x^2 + 1) + 3$ è

(a) $3x^2 \cos(x^2 + 1)$

► (b) $3x - \cos(x^2 + 1) + 5$

(c) $3x^2 + \cos(x^2 + 1)$

(d) $3(x^2 + 1) \cos x$

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva di $2x \sin(x^2+1)$

con la sostituzione

$$x^2+1=t, \quad \frac{dt}{dx}=2x \quad 2x dx=dt$$

$$\int 2x \sin(x^2+1) dx = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(x^2+1) + C$$

Quindi

$$\int 2x \sin(x^2+1) + 3 dx = \int 2x \sin(x^2+1) dx + \int 3 dx =$$

$$= -\cos(x^2+1) + 3x + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Scegliendo $C=5$ otteniamo che $3x - \cos(x^2+1) + 5$

è una primitiva di $f(x)$.

4. La funzione $F(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{t+2} dt & \text{se } x > 0 \\ e^x - x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

- (a) è derivabile in $x = 0$ (b) è continua ma derivabile solo a destra in $x = 0$
 (c) è continua ma derivabile solo a sinistra in $x = 0$ ► (d) non è continua in $x = 0$

Soluzione:

Osserviamo che la funzione $f(t) = \frac{\log(1+t^2)}{t+2}$ è

continua in un intorno del punto $t=0$, quindi è

integrabile secondo Riemann in un intorno di $t=0$, pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{t+2} dt = 0$$

Dato che $F(0) = e^0 - 0 = 1$ risulta che F non

è continua in $x=0$.

5. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

- (a) diverge negativamente (b) converge (c) non esiste ► (d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ e osserviamo che f è

continua in $[1, +\infty)$. Esaminiamo l'andamento per $x \rightarrow +\infty$.

Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \cos 0 = 1$ quindi

$f(x) > 0$ in un intorno di $+\infty$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$. Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$

e $\int_1^{+\infty} g(x) dx = +\infty$, per il criterio del confronto

asintotico, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge positivamente.

6. L'integrale generalizzato $\int_0^{\infty} (\sqrt{1+x^2} - x)^{3/2} dx$

(a) non esiste

► (b) converge

(c) diverge negativamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^{\infty} (\sqrt{1+x^2} - x)^{3/2} dx$$

La funzione $f(x) = (\sqrt{1+x^2} - x)^{3/2}$ è continua in $[0, +\infty)$

inoltre $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$. Osserviamo che, $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\left(x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \right)^{1/2} - x \right)^{3/2} = \left(x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{1/2} - x \right)^{3/2} = \\ &= x^{3/2} \left(\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{1/2} - 1 \right)^{3/2} \end{aligned}$$

Ricordiamo ora che $(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$.

Utilizziamo questo sviluppo di Taylor con $\alpha = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$.

$$f(x) = x^{3/2} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 \right)^{3/2} = x^{3/2} \frac{1}{x^3} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right)^{3/2} = \frac{1}{x^{3/2}} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right)^{3/2}$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ e osserviamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{1}{2} \right)^{3/2}$.

Dato che $\int_{+\infty} g(x) dx$ converge, dal criterio del confronto

asintotico, anche $\int f(x) dx$ converge. Dato che f è

continua in $[0, 1]$, otteniamo che $\int_0^1 f(x) dx$ converge, quindi

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + \log n}{e^n + n^5} =$

(a) 0

► (b) $+\infty$

(c) $\frac{4}{e}$

(d) $\log \frac{4}{5}$

Soluzione:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + \log n}{e^n + n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n \left(1 + \frac{\log n}{4^n}\right)}{e^n \left(1 + \frac{n^5}{e^n}\right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\log n}{4^n}}{1 + \frac{n^5}{e^n}} = (+\infty) \cdot \frac{1+0}{1+0} = +\infty$$

per gerarchia di infiniti e perché $\frac{4}{e} > 1$.

8. La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{(\sin n)^n}{n^2}$

- (a) converge (b) è indeterminata (c) diverge positivamente (d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{(\sin n)^n}{n^2}$ e osserviamo che la successione a_n è a segno variabile. Proviamo la convergenza assoluta.

$$0 \leq |a_n| = \frac{|\sin n|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Scegliamo quindi $b_n = \frac{1}{n^2}$ e utilizziamo il criterio del confronto. Poiché $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, anche $\sum_n |a_n|$ converge, quindi, per il criterio di convergenza assoluta, $\sum_n a_n$ converge.

9. La norma del vettore $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ vale

- (a) 9 (b) $\sqrt{15}$ ► (c) $3\sqrt{11}$ (d) 15

Soluzione:

$$\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{81 + 9 + 9} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

10. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1\}$

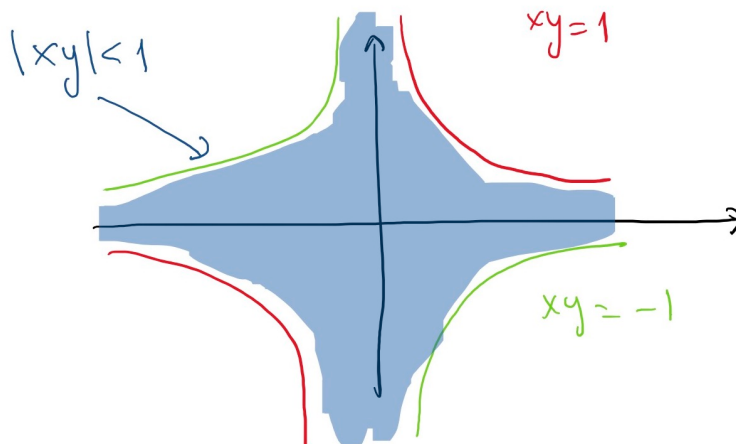
- (a) non è limitato (b) è limitato
(c) è chiuso (d) non è né aperto né chiuso

Soluzione:

L'insieme $|xy|=1 \Leftrightarrow xy=1$ oppure $xy=-1$

quindi l'equazione $|xy|=1$ descrive il grafico di due iperboli.

L'insieme $|xy|<1$
è non limitato.



Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 301418 04 settembre 2025
--------------------------------	--------------------	------------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

1	b
2	a
3	c
4	b
5	c
6	b
7	d
8	b
9	b
10	d

1. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$ è
- (a) limitato superiormente

(b) aperto

(c) un intervallo

(d) limitato inferiormente

Soluzione:

Osserviamo che $|x|>1 \Leftrightarrow x<-1$ oppure $x>1$, quindi

$A = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

che è un insieme aperto non limitato né inferiormente

né superiormente.

2. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x| - |x - 2|$
- (a) è limitata

(b) non è limitata né superiormente né inferiormente

(c) è limitata superiormente ma non inferiormente

(d) è limitata inferiormente ma non superiormente
- Soluzione:

$$f(x) = |x| - |x-2|$$

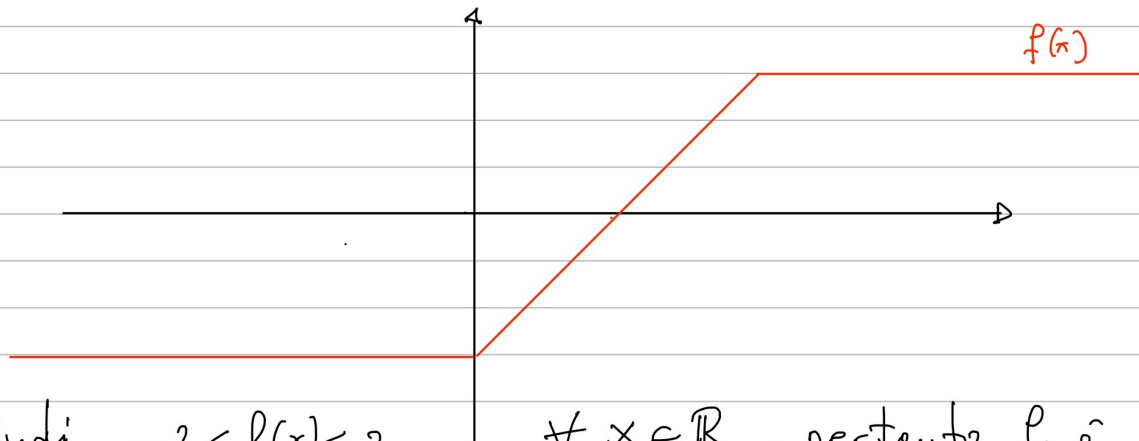
Ricordiamo che $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ / $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ 2-x & \text{se } x < 2 \end{cases}$

quindi

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -x - (2-x) = -x - 2 + x = -2$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x - (2-x) = x - 2 + x = 2x - 2$$

$$2 \leq x \Rightarrow f(x) = x - (x-2) = x - x + 2 = 2$$



Quindi $-2 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, pertanto f è limitata.

3. Una primitiva della funzione $f(x) = 2x \sin(x^2 + 1) + 3$ è

(a) $3x^2 \cos(x^2 + 1)$

(b) $3x^2 + \cos(x^2 + 1)$

► (c) $3x - \cos(x^2 + 1) + 5$

(d) $3(x^2 + 1) \cos x$

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva di $2x \sin(x^2+1)$

con la sostituzione

$$x^2+1=t, \quad \frac{dt}{dx}=2x \quad 2x dx=dt$$

$$\int 2x \sin(x^2+1) dx = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(x^2+1) + C$$

Quindi

$$\int 2x \sin(x^2+1) + 3 dx = \int 2x \sin(x^2+1) dx + \int 3 dx =$$

$$= -\cos(x^2+1) + 3x + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Scegliendo $C=5$ otteniamo che $3x - \cos(x^2+1) + 5$

è una primitiva di $f(x)$.

4. La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \int_{x^3}^0 e^t - e^{-t} dt$

(a) è debolmente crescente

(c) è limitata inferiormente

► (b) è limitata superiormente

(d) ha minimo

Soluzione:

$$\int e^t - e^{-t} dt = e^t - (-e^{-t}) + c = e^t + e^{-t} + c$$

quindi

$$F(x) = \int_{x^3}^0 e^t - e^{-t} dt = \left[e^t + e^{-t} \right]_{x^3}^0 = e^0 + e^0 - (e^{x^3} + e^{-x^3}) = 2 - e^{x^3} - e^{-x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2 - e^{+\infty} - e^{-\infty} = 2 - (+\infty) - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 2 - e^{-\infty} - e^{+\infty} = 2 - 0 - (+\infty) = -\infty$$

Poiché F è continua, per il teorema di Weierstrass generalizzato, F è limitata superiormente ma non inferiormente.

5. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

- (a) non esiste (b) converge ► (c) diverge positivamente (d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ e osserviamo che f è continua in $[1, +\infty)$. Esaminiamo l'andamento per $x \rightarrow +\infty$.

Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \cos 0 = 1$ quindi $f(x) > 0$ in un intorno di $+\infty$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$. Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$

e $\int_1^{+\infty} g(x) dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge positivamente.

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^3} dt$

- (a) diverge positivamente ► (b) diverge negativamente (c) converge (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^3} dt$$

Se $t \geq 0$ $t e^{-t^3} \geq 0$. Scegliamo $g(t) = e^{-t}$ e utilizziamo il calcolo a ritroso.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t e^{-t^3}}{e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{t^3-t}} = 0. \text{ Dato che } \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

converge, otteniamo che $\int_0^{+\infty} t e^{-t^3} dt$ converge.

$$\text{Se } t \leq 0 \Rightarrow t e^{-t^3} \leq 0$$

$$\text{inoltre } \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^{-t^3} = (-\infty) e^{+\infty} = -\infty$$

$$\text{quindi } \int_{-\infty}^0 t e^{-t^3} dt = -\infty$$

Usando i risultati sulle due semirette otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^3} dt = -\infty$$

$$7. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + \log n}{e^n + n^5} =$$

$$(a) \log \frac{4}{5}$$

$$(b) 0$$

$$(c) \frac{4}{e}$$

$$\blacktriangleright (d) +\infty$$

Soluzione:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + \log n}{e^n + n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n \left(1 + \frac{\log n}{4^n}\right)}{e^n \left(1 + \frac{n^5}{e^n}\right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\log n}{4^n}}{1 + \frac{n^5}{e^n}} = (+\infty) \cdot \frac{1+0}{1+0} = +\infty$$

per gerarchia di infiniti e perché $\frac{4}{e} > 1$.

$$8. \text{ La serie } \sum_{n \geq 1} \frac{(\sin n)^n}{n^2}$$

$$(a) \text{ diverge negativamente } (b) \text{ converge}$$

$$(c) \text{ diverge positivamente } (d) \text{ è indeterminata}$$

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{(\sin n)^n}{n^2}$ e osserviamo che la successione a_n è a segno variabile. Proviamo la convergenza assoluta.

$$0 \leq |a_n| = \frac{|\sin n|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Scegliamo quindi $b_n = \frac{1}{n^2}$ e utilizziamo il criterio del confronto. Poiché $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, anche $\sum_n |a_n|$ converge, quindi, per il criterio di convergenza assoluta, $\sum_n a_n$ converge.

9. La norma del vettore $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ vale

(a) $\sqrt{15}$

► (b) $3\sqrt{11}$

(c) 15

(d) 9

Soluzione:

$$\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{81 + 9 + 9} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

10. La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ nel punto (0,0)

(a) ha entrambe le derivate parziali ed è continua

(b) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

(c) non è continua e non ha nessuna delle derivate parziali

► (d) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Quindi esistono entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione di f all'asse y rappresentato dalla curva $\gamma(t) = (0,t)$. Risultato che

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

Ora consideriamo la restrizione alla parabola $y^2 = x$ rappresentato

dalla curva $\alpha(t) = (t^2, t)$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2} = 1 \neq 0$$

quindi non esiste il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ e la f non è continua in $(0,0)$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 935467 04 settembre 2025
--------------------------------	--------------------	------------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

1	c
2	a
3	d
4	a
5	d
6	a
7	b
8	b
9	b
10	a

1. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$ è
- (a) un intervallo

(b) limitato superiormente

(c) aperto

(d) limitato inferiormente

Soluzione:

Osserviamo che $|x|>1 \Leftrightarrow x<-1$ oppure $x>1$, quindi

$A = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

che è un insieme aperto non limitato né inferiormente né superiormente .

2. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, + \infty)$ definita da $f(x) = e^{x \cos x}$
- (a) è surgettiva ma non iniettiva

(b) è bigettiva

(c) non è né iniettiva né surgettiva

(d) è iniettiva ma non surgettiva

Soluzione:

$$f(x) = e^{x \cos x}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty).$$

Scegliamo $a_n = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ e otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n\pi \cos(2n\pi)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n\pi \cdot 1} = +\infty$$

quindi $\sup(f) = +\infty$.

Osserviamo ora che $f(x) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$ perché la funzione esponenziale è sempre positiva.

Scegliamo $b_n = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ e otteniamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\pi + 2n\pi) \cos(\pi + 2n\pi)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\pi + 2n\pi)(-1)} = e^{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

quindi $\inf(f) = 0$.

Poiché f è continua, per il teorema dei valori intermedi, f è surgettiva.

$$\begin{aligned} \text{Osserviamo anche che } f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) &= e^{\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)} = \\ &= e^{\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \cdot 0} = e^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ quindi } f \end{aligned}$$

assume infinite volte lo stesso valore, pertanto f non è iniettiva.

3. Una primitiva della funzione $f(x) = 2x \sin(x^2 + 1) + 3$ è

- (a) $3x^2 \cos(x^2 + 1)$
(c) $3(x^2 + 1) \cos x$

- (b) $3x^2 + \cos(x^2 + 1)$
► (d) $3x - \cos(x^2 + 1) + 5$

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva di $2x \sin(x^2+1)$

con la sostituzione

$$x^2+1=t, \quad \frac{dt}{dx}=2x \quad 2x dx=dt$$

$$\int 2x \sin(x^2+1) dx = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(x^2+1) + C$$

Quindi

$$\int 2x \sin(x^2+1) + 3 dx = \int 2x \sin(x^2+1) dx + \int 3 dx =$$

$$= -\cos(x^2+1) + 3x + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Scegliendo $C=5$ otteniamo che $3x - \cos(x^2+1) + 5$

è una primitiva di $f(x)$.

4. $\int_0^1 \sqrt[3]{7x+1} dx =$

► (a) $\frac{45}{28}$

(b) $-\frac{47}{24}$

(c) $-\frac{9}{16}$

(d) 12

Soluzione:

$$\int \sqrt[3]{7x+1} \, dx$$

Eseguiamo la sostituzione $7x+1=t \Rightarrow 7x=t-1 \quad x=\frac{t-1}{7}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{7} \quad dx = \frac{dt}{7}, \text{ quindi}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{7x+1} \, dx &= \int \sqrt[3]{t} \frac{dt}{7} = \frac{1}{7} \int t^{1/3} dt = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4} t^{4/3} + c = \frac{3}{28} t^{4/3} + c \\ &= \frac{3}{28} (7x+1)^{4/3} + c \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema di Torricelli otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt[3]{7x+1} \, dx &= \left[\frac{3}{28} (7x+1)^{4/3} \right]_0^1 = \frac{3}{28} \left(8^{4/3} - 1^{4/3} \right) = \\ &= \frac{3}{28} (2^4 - 1) = \frac{3}{28} (16 - 1) = \frac{45}{28} \end{aligned}$$

5. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

- (a) non esiste (b) diverge negativamente (c) converge ► (d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ e osserviamo che f è continua in $[1, +\infty)$. Esaminiamo l'andamento per $x \rightarrow +\infty$.

Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \cos 0 = 1$ quindi $f(x) > 0$ in un intorno di $+\infty$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$. Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$

e $\int_1^{+\infty} g(x) dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge positivamente.

6. $\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} \right) \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$

- (a) converge (b) diverge positivamente (c) non esiste (d) diverge negativamente

Soluzione:

Per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} &= e^{\frac{x-1}{x+1}} - e^{-1} = e^{-1} \left(e^{\frac{x-1}{x+1} + 1} - 1 \right) = e^{-1} \left(e^{\frac{x-1+x+1}{x+1}} - 1 \right) \\ &= e^{-1} \left(e^{\frac{2x}{x+1}} - 1 \right) = e^{-1} \left(1 + \frac{2x}{x+1} + o\left(\frac{2x}{x+1}\right) - 1 \right) \\ &= x e^{-1} \left(\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right) \right) \end{aligned}$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-1} \left(\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right) \right) \cdot \frac{1}{x^{3/2}} \cdot x^{1/2} = e^{-1} \cdot 2$$

Dato che $\int_0^1 g(x) dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, $\int_0^1 f(x) dx$ converge, dove $f(x) = \left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} \right) \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$

$$\text{Per } x \rightarrow +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} = e - \frac{1}{e}$$

quindi scegliamo $h(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ per ottenere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = e - \frac{1}{e} \quad \text{Dato che } \int_1^{+\infty} h(x) dx \text{ converge,}$$

dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + \log n}{e^n + n^5} =$

(a) $\frac{4}{e}$

► (b) $+\infty$

(c) $\log \frac{4}{5}$

(d) 0

Soluzione:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + \log n}{e^n + n^5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n \left(1 + \frac{\log n}{4^n}\right)}{e^n \left(1 + \frac{n^5}{e^n}\right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\log n}{4^n}}{1 + \frac{n^5}{e^n}} = (+\infty) \cdot \frac{1+0}{1+0} = +\infty$$

per gerarchia di infiniti e perché $\frac{4}{e} > 1$.

8. La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{(\sin n)^n}{n^2}$

- (a) diverge positivamente (b) converge (c) diverge negativamente (d) è indeterminata

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{(\sin n)^n}{n^2}$ e osserviamo che la successione a_n è a segno variabile. Proviamo la convergenza assoluta.

$$0 \leq |a_n| = \frac{|\sin n|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Scegliamo quindi $b_n = \frac{1}{n^2}$ e utilizziamo il criterio del confronto. Poiché $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, anche $\sum_n |a_n|$ converge, quindi, per il criterio di convergenza assoluta, $\sum_n a_n$ converge.

9. La norma del vettore $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ vale

- (a) 9 (b) $3\sqrt{11}$ (c) $\sqrt{15}$ (d) 15

Soluzione:

$$\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{81 + 9 + 9} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

10. La funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = e^{1-x}(y^3 - 2xy)$

- (a) non è né superiormente né inferiormente limitata (b) è inferiormente ma non superiormente limitata
(c) è limitata (d) è superiormente ma non inferiormente limitata

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{1-x} (y^3 - 2xy)$$

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo la restrizione alla curva $\gamma(t) = (1, t)$
(retta $x=1$).

$$g(t) = f(\gamma(t)) = f(1, t) = e^{1-1} (t^3 - 2t) = t^3 - 2t$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty$$

quindi f non è né superiormente né inferiormente
limitata.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 169776 04 settembre 2025
--------------------------------	--------------------	------------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

1	d
2	a
3	c
4	c
5	c
6	b
7	d
8	d
9	b
10	d

1. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$ è

- (a) limitato superiormente (b) un intervallo (c) limitato inferiormente (d) aperto

Soluzione:

Osserviamo che $|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ oppure $x > 1$, quindi

$$A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

che è un insieme aperto non limitato né inferiormente né superiormente.

2. L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |\sin x| < 1\}$ è:

- (a) non limitato (b) limitato superiormente
(c) limitato inferiormente (d) un intervallo

Soluzione:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |\sin x| < 1\}$$

Possiamo risolvere esplicitamente la disuguaglianza ottenendo

$$|\sin x| < 1 \Leftrightarrow -1 < \sin x < 1 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

quindi A è l'unione di infiniti intervalli di ampiezza π

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi).$$

Ne segue che A non è limitato.

3. Una primitiva della funzione $f(x) = 2x \sin(x^2 + 1) + 3$ è

(a) $3x^2 \cos(x^2 + 1)$

(b) $3x^2 + \cos(x^2 + 1)$

► (c) $3x - \cos(x^2 + 1) + 5$

(d) $3(x^2 + 1) \cos x$

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva di $2x \sin(x^2 + 1)$

con la sostituzione

$$x^2 + 1 = t, \quad \frac{dt}{dx} = 2x \quad 2x dx = dt$$

$$\int 2x \sin(x^2 + 1) dx = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(x^2 + 1) + C$$

Quindi

$$\int 2x \sin(x^2 + 1) + 3 dx = \int 2x \sin(x^2 + 1) dx + \int 3 dx =$$

$$= -\cos(x^2 + 1) + 3x + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Scegliendo $C = 5$ otteniamo che $3x - \cos(x^2 + 1) + 5$

è una primitiva di $f(x)$.

4. La funzione $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

(a) è sempre positiva

(b) è debolmente crescente

► (c) ha un punto di massimo locale e uno di minimo locale

(d) è sempre negativa

Soluzione:

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

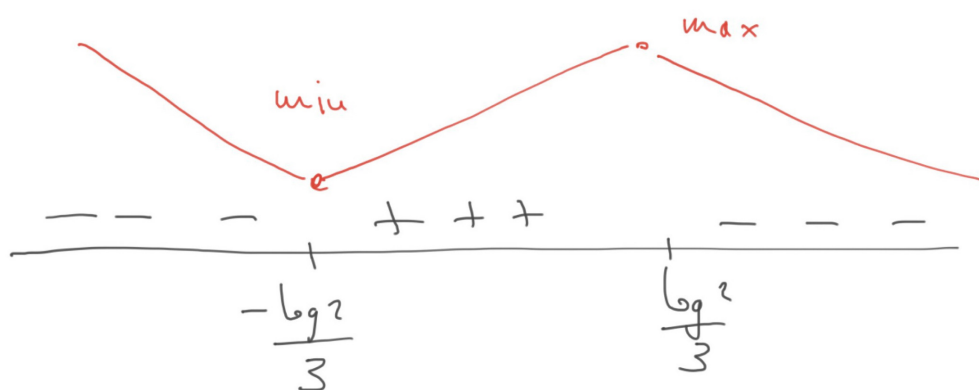
$$G'(x) = e^{-(2x)^2} \cdot 2 - e^{-x^2} \cdot 1 = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$

segno di G' :

$$2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-4x^2} (2 - e^{3x^2})$$

segno di $2 - e^{3x^2}$? $2 - e^{3x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq e^{3x^2}$

$$\log 2 \geq 3x^2 \quad \frac{\log 2}{3} \geq x^2 \Leftrightarrow -\frac{\log 2}{3} \leq x \leq \frac{\log 2}{3}$$



G ha un punto di minimo e uno di max locale

5. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

(a) diverge negativamente (b) converge

► (c) diverge positivamente (d) non esiste

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ e osserviamo che f è continua in $[1, +\infty)$. Esaminiamo l'andamento per $x \rightarrow +\infty$.

Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \cos 0 = 1$ quindi $f(x) > 0$ in un intorno di $+\infty$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$. Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$

e $\int_1^{+\infty} g(x) dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge positivamente.

6. L'integrale generalizzato $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} dx$

(a) vale $+\infty$

► (b) non esiste

(c) vale $\frac{\pi^2}{4}$

(d) vale 0

Soluzione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} dx$$

La funzione $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}$ è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico. Esaminiamo $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{x} dx$

Per $x \rightarrow 0^+$ $\frac{e^{-x^2}}{x} = \frac{1+o(1)}{x}$ quindi prendiamo $g(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+o(1)}{x} \cdot x = 1$. Dato che $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$

segue che $\int_0^1 f(x) dx = +\infty$ (confronto asintotico).

Per simmetria $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\infty$ quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ non esiste.

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + \log n}{e^n + n^5} =$

(a) $\log \frac{4}{5}$

(b) $\frac{4}{e}$

(c) 0

► (d) $+\infty$

Soluzione:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + \log n}{e^n + n^5} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n \left(1 + \frac{\log n}{4^n}\right)}{e^n \left(1 + \frac{n^5}{e^n}\right)} = \\&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\log n}{4^n}}{1 + \frac{n^5}{e^n}} = (+\infty) \cdot \frac{1+0}{1+0} = +\infty\end{aligned}$$

per gerarchia di infiniti e perché $\frac{4}{e} > 1$.

8. La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{(\sin n)^n}{n^2}$

(a) diverge negativamente (b) diverge positivamente (c) è indeterminata ► (d) converge

Soluzione:

Poniamo $a_n = \frac{(\sin n)^n}{n^2}$ e osserviamo che la successione a_n è a segno variabile. Proviamo la convergenza assoluta.

$$0 \leq |a_n| = \frac{|\sin n|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Scegliamo quindi $b_n = \frac{1}{n^2}$ e utilizziamo il criterio del confronto. Poiché $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, anche $\sum_n |a_n|$ converge, quindi, per il criterio di convergenza assoluta, $\sum_n a_n$ converge.

9. La norma del vettore $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ vale

(a) 9 ► (b) $3\sqrt{11}$ (c) $\sqrt{15}$ (d) 15

Soluzione:

$$\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{81 + 9 + 9} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

10. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 4)(y - x) > 0\}$ è

(a) un semidisco

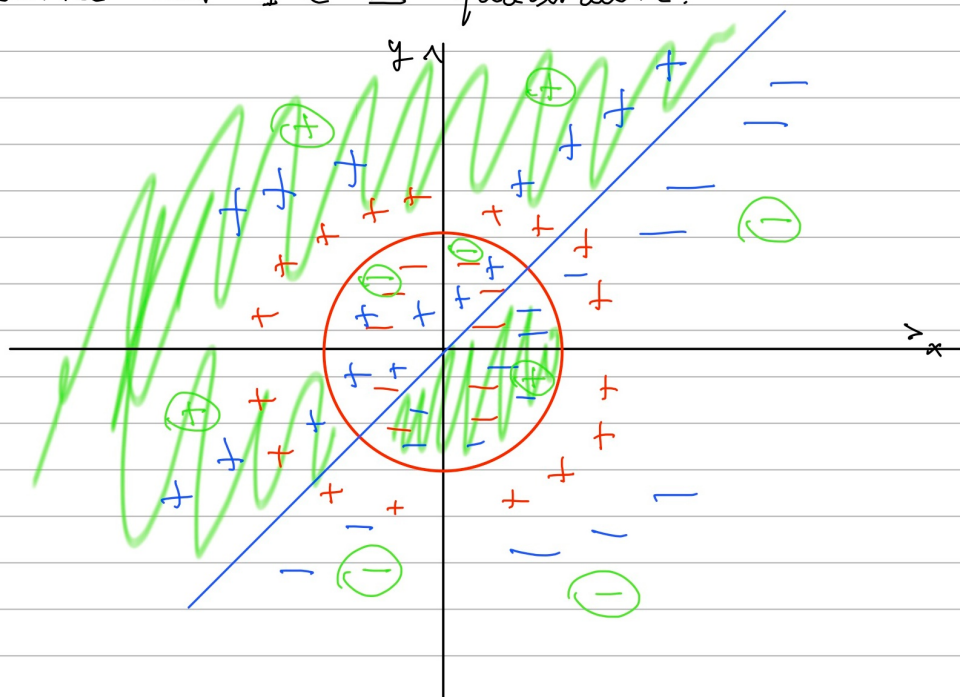
- (b) un semipiano
- (c) il complementare di un semidisco
- (d) l'unione disgiunta di un semidisco e una regione illimitata

Soluzione:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 4)(y - x) > 0\}.$$

La disequazione $x^2 + y^2 - 4 > 0$ rappresenta l'esterno del disco di centro $(0,0)$ e raggio 2.

La disequazione $y - x > 0$ rappresenta il semipiano sopra la bisettrice del I e III quadrante.



L'insieme A è l'unione del semidisco inferiore e del semipiano superiore privato del semidisco superiore.